I - Cercle et triangle rectangle

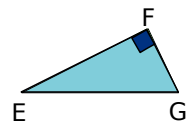
A - Pour démontrer qu'un point est sur un cercle

Si un **triangle est rectangle** alors **son cercle circonscrit** a pour diamètre son hypoténuse.

Remarque :

Voici une autre manière d'énoncer ce théorème : « Si un triangle est rectangle alors il est inscrit dans un demi-cercle ayant pour diamètre son hypoténuse. »

Exemple : Soit EFG un triangle rectangle en F. Démontre que le point F appartient au cercle de diamètre [EG].



Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse, le triangle EFG est rectangle en F.	Or, si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour diamètre son hypoténuse.	Donc, le point F appartient au cercle de diamètre [EG].

B - Longueur de la médiane

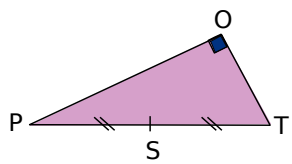
Théorème

Si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.

Remarque :

Voici une autre manière d'énoncer ce théorème : « Si un triangle est rectangle alors le milieu de son hypoténuse est à égale distance des trois sommets du triangle. »

Exemple : Le triangle POT est un triangle rectangle en O tel que TP = 14 cm. Le point S est le milieu du segment [TP]. Quelle est la longueur du segment [SO] ?



Étape préliminaire : Dans le triangle POT rectangle en O, [OS] joint le sommet O et le milieu S de [TP] donc [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.

Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse le triangle POT est rectangle en O et [OS] est la médiane issue du sommet de l'angle droit O.	Or, si un triangle est rectangle alors la médiane issue du sommet de l'angle droit a pour longueur la moitié de la longueur de l'hypoténuse.	Donc $OS = \frac{1}{2} TP = \frac{1}{2} \times 14 = 7$ Ainsi OS = 7 cm

C - Pour démontrer qu'un triangle est rectangle

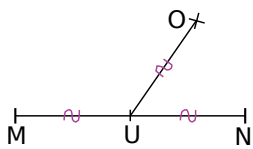
Théorème

Si **un triangle est inscrit dans un cercle de diamètre l'un de ses côtés** alors **il est rectangle** et admet ce diamètre pour hypoténuse.

Théorème

Si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de la longueur de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.

Exemple : MON est un triangle, U est le milieu de [MN] et on a : MN = 8 cm ; OU = 4 cm.
Démontre que le triangle MON est rectangle en O.



Étape préliminaire : Dans le triangle MON, [OU] joint le sommet O et le milieu U de [MN] donc [OU] est la médiane relative au côté [MN].

Données	Propriété	Conclusion
Par hypothèse, dans le triangle MON, [OU] est la médiane relative au côté [MN].	Or, si, dans un triangle, la longueur de la médiane relative à un côté est égale à la moitié de ce côté alors ce triangle est rectangle et admet ce côté pour hypoténuse.	Donc le triangle MON est rectangle en O.

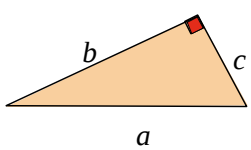
II - Théorème de Pythagore

A - Théorème direct

Théorème

Si **un triangle est rectangle** alors **le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés**.

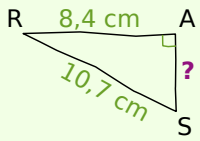
Exemple 1 : Le triangle ci-dessous est rectangle donc $a^2 = b^2 + c^2$.



Exemple 2 : Calcul de la longueur d'un côté de l'angle droit

Soit RAS un triangle rectangle en A tel que RS = 10,7 cm et RA = 8,4 cm. Calcule AS.

Figure à main levée :



Par hypothèse, le triangle RAS est rectangle en A.
Donc, d'après le théorème de Pythagore, on a :

$RS^2 = RA^2 + AS^2$

càd $10{,}7^2 = 8{,}4^2 + AS^2$

càd $114{,}49 = 70{,}56 + AS^2$

càd $AS^2 = 114{,}49 - 70{,}56$

càd $AS^2 = 43{,}93$

Donc, $AS = \sqrt{43{,}93} \approx 6{,}63$ cm (à 0,01 près).

Exemple 3 : NUL est un triangle tel que NU = 63 cm ; LU = 69 cm et LN = 93 cm. Démontre que NUL n'est pas un triangle rectangle.

Remarque préliminaire : Si ce triangle est rectangle, seul le côté [LN] peut être son hypoténuse car c'est le côté le plus long.

Dans le triangle NUL, le plus long côté est [LN] donc on **calcule séparément** LN^2 et $LU^2 + NU^2$:

D'une part, $LN^2 = 93^2$

càd $LN^2 = 8649$

D'autre part, $LU^2 + NU^2 = 69^2 + 63^2$

càd $LU^2 + NU^2 = 4761 + 3969$

càd $LU^2 + NU^2 = 8730$

On constate que $LN^2 \neq LU^2 + NU^2$.
Or si le triangle était rectangle, d'après le théorème de Pythagore, il y aurait égalité.
Comme ce n'est pas le cas, le triangle NUL n'est pas rectangle.
(On peut aussi dire : d'après la **contraposée** du théorème de Pythagore le triangle NUL n'est pas rectangle)

B - Réciproque du théorème de Pythagore

Théorème

Si, **dans un triangle, le carré de la longueur du plus grand côté est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle est rectangle** et admet ce plus grand côté pour hypoténuse.

Exemple : NEZ est un triangle tel que NE = 90 cm ; EZ = 54 cm et NZ = 72 cm. Démontre que ce triangle est rectangle.

Dans le triangle NEZ, le plus long côté est [NE] donc on **calcule séparément** NE^2 et $EZ^2 + NZ^2$:

D'une part, $NE^2 = 90^2$

càd $NE^2 = 8100$

D'autre part, $EZ^2 + NZ^2 = 54^2 + 72^2$

càd $EZ^2 + NZ^2 = 2916 + 5184$

càd $EZ^2 + NZ^2 = 8100$

On constate que $NE^2 = EZ^2 + NZ^2$.

Donc, d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle NEZ est rectangle en Z.